

(网络收集) 2025 年北京数学卷高考真题带答案带解析带分值文字版

一、选择题。

1. (☆☆) 集合 $M = \{x | 2x - 1 > 5\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{1, 2, 3\}$
- B. $\{2, 3\}$
- C. $\{3\}$
- D. $\emptyset$

【答案】D

【解析】 本题主要考查交集的运算

$$\because M = \{x | 2x - 1 > 5\} = \{x | x > 3\}, N = \{1, 2, 3\}, \therefore M \cap N = \emptyset$$

故选: D

【分值】4

2. (☆☆) 已知复数 z 满足 $i \cdot z + 2 = 2i$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$
- B. $2\sqrt{2}$
- C. 4
- D. 8

【答案】B

【解析】 本题考查复数的运算和复数的模

$$\because iz + 2 = 2i,$$

$$\therefore z = \frac{2i-2}{i} = \frac{(2i-2)i}{i \cdot i} = 2 + 2i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

【分值】4

3. (☆☆) 双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{5}{4}$

D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】本题考查双曲线的离心率

$$\because x^2 - 4y^2 = 4$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

$$\therefore a^2 = 4, b^2 = 1, c^2 = a^2 + b^2 = 5$$

$$\therefore a = 2, c = \sqrt{5}$$

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

【分值】4

4. (☆☆) 为得到函数 $y = 9^x$ 的图象，只需把函数 $y = 3^x$ 的图象上的所有点 ()

A. 横坐标变成原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变

B. 横坐标变成原来的 2 倍，纵坐标不变

C. 纵坐标变成原来的 $\frac{1}{3}$ 倍，横坐标不变

D. 纵坐标变成原来的 3 倍，横坐标不变

【答案】A

【解析】本题考查函数图像的伸缩变换

$y = 3^x$ 的图像，纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ ，得到 $y = 3^{2x} = 9^x$ 的图像，
故选 A

【分值】4

5. (☆☆) 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列， $a_1 = -2$ ，若 a_3, a_4, a_6 成等比数列，则 $a_{10} = ()$

- A. -20
B. -18
C. 16
D. 18

【答案】C

【解析】本题考查等差数列的通项公式、等比中项的应用

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\therefore d \neq 0$

$$\because a_4^2 = a_3 \cdot a_6, \therefore (-2 + 3d)^2 = (-2 + 2d)(-2 + 5d)$$

$$\therefore d^2 - 2d = 0, \because d \neq 0, \therefore d = 2$$

$$\therefore a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9 \times 2 = 16$$

故选 C

【分值】4

6. (☆☆) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 则 ()

A. $a^2 + b^2 > 2ab$

B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$

C. $a + b > \sqrt{ab}$

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$

【答案】C

【解析】本题考查不等式比较大小

A 选项: 当 $a = b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$, 故 A 错误

B 选项: 取 $a = b = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6$, $\frac{1}{ab} = 9$, 故 B 错误

C 选项: $\because a > 0, b > 0$, $a + b \geq 2\sqrt{ab} > \sqrt{ab}$, 故 C 正确

D 选项: $\because \frac{1}{a} > 0, \frac{1}{b} > 0, \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 故 D 错误
故选 C

【分值】4

7. (☆☆) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 则“函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$ ”是“对任意 $M \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

本题考查充分必要条件的判断

解析: $\because f(x)$ 的定义域为 D

若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则对 $\forall m \in \mathbb{R}$, 存在 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| \geq m$, 所以充分性成立;

反之, 若 $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in D$, 使 $|f(x_0)| > m$, $f(x)$ 的值域不一定为 $\mathbb{R}$, 比如 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, $\therefore$ 必要性不成立

故选 A

【分值】4

8. (☆☆) 设函数 $f(x) = \sin(\omega x) + \cos(\omega x) (\omega > 0)$, 若 $f(x + \pi) = f(x)$ 恒成立,

且 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点, 则 ω 的最小值为 ()

- A. 8
- B. 6
- C. 4
- D. 3

【答案】C

【解析】本题考查三角恒等变换和三角函数的性质

解析: $f(x) = \sin(\omega x) + \cos(\omega x)$

$$= \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$$

当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4}]$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上存在零点, $\therefore \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{4} \geq \pi$, $\therefore \omega \geq 3$.

又 $\because f(x + \pi) = f(x)$, 可知 π 为 $f(x)$ 周期的整数倍

即 $\pi = kT, k \in \mathbb{Z}$, $\because T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore \pi = k \cdot \frac{2\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$, $\therefore 2k = \omega, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore \omega$ 的最小值为 4

故选: C

【分值】4

9. (☆☆) 在一定条件下, 某人工智能大语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T = k \log_2 N$ (单位: 小时), 其中 k 为常数, 在此条件下, 已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时, 训练时间增加 20 小时; 当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时, 训练时间增加 (单位: 小时) ()

A. 2

B. 4

C. 20

D. 40

【答案】B

【解析】本题考查对数的运算在实际问题中的应用

由题意可得 $k \log_2 \frac{1.024 \times 10^9}{10^6} - k \log_2 1 = 20$

$\therefore k \log_2 \frac{1.024 \times 10^9}{10^6} = 20$, $\therefore k \log_2 1024 = 20$, $\therefore 1024 = 2^{10}$,

$$\therefore 10k = 20,$$

$$\therefore k = 2, \because T = 2\log_2 N,$$

$$\therefore 2\log_2 \frac{4.096 \times 10^9}{10^6} - 2\log_2 \frac{1.024 \times 10^9}{10^6} = 2\log_2 4 = 4$$

故选：B

【分值】4

10. (☆☆) 已知平面直角坐标系 xOy 中， $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{2}$ ， $|\vec{AB}| = 2$ ，设

$C(3, 4)$ ，则 $|2\vec{CA} + \vec{AB}|$ 的取值范围是 ()

A. $[6, 14]$

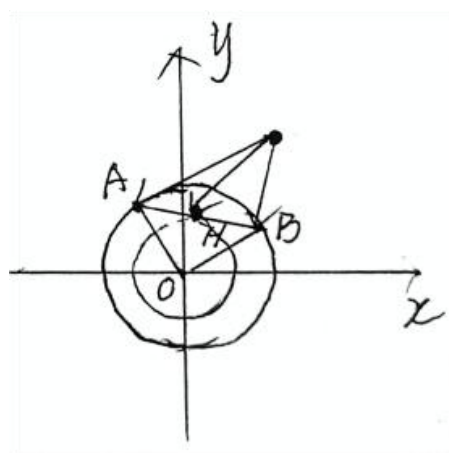
B. $[6, 12]$

C. $[8, 14]$

D. $[8, 12]$

【答案】D

【解析】本题考查平面向量的运算，向量的模的取值范围。



$\because |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = \sqrt{2}$ ，可知 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ ，

A 、 B 两点在以 O 为圆心， 2 为半径的圆上，

取 AB 的中点 H ，可知 $|\overrightarrow{OH}|=1$ ， $\therefore H$ 点在以 O 为圆心，1为半径的圆上。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}|^2 &= \overrightarrow{2CA}^2 + 4\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 \\ &= 4\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + 4 \\ &= 4\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + 4 \\ &= 4(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}) + 4 \\ &= 4(\overrightarrow{CH}^2 - \overrightarrow{HA}^2) + 4 \\ &= 4(\overrightarrow{CH}^2 - 1) + 4 \\ &= 4\overrightarrow{CH}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{2CA} + \overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CH}|$$

$$\therefore ||\overrightarrow{CO}| - 1| \leq |\overrightarrow{CH}| \leq |\overrightarrow{CO}| + 1$$

$$|\overrightarrow{CO}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \text{ 则 } 4 \leq |\overrightarrow{CH}| \leq 6$$

$$\therefore 8 \leq 2|\overrightarrow{CH}| \leq 12$$

故选：D.

【分值】4

二、填空题。

11. (☆) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点到焦点的距离为3，则 $p =$ 。

【答案】6

【解析】本题考查抛物线的焦点坐标和几何性质

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的顶点为 $(0, 0)$

焦点为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ， $\therefore \frac{p}{2} = 3$ ， $\therefore p = 6$

【分值】4

12. (☆☆) 已知 $(1 - 2x)^4 = a_0 - 2a_1x + 4a_2x^2 - 8a_3x^3 + 16a_4x^4$ ，则 $a_0 =$ ；

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 =$ 。

【答案】①1

②15

【解析】 本题考查赋值法求二项展开式的系数.

解:令 $x = 0$, 得 $a_0 = 1$,

令 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $16 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

把 $a_0 = 1$ 代入, 得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$

故答案为:①1②15

【分值】 4

13. (☆☆) 已知 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, 且 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$,

$\cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta)$, 写出满足条件的一组 $(\alpha, \beta) = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$, 答案不唯一。

【解析】 本题考查了两角和与差的正、余弦公式

$$\because \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \cos \alpha \sin \beta = 0 \text{ ①}$$

$$\because \cos(\alpha + \beta) \neq \cos(\alpha - \beta)$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \neq \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta \neq 0 \text{ ②}$$

由①, ②可知 $\cos \alpha = 0$, $\sin \beta \neq 0$

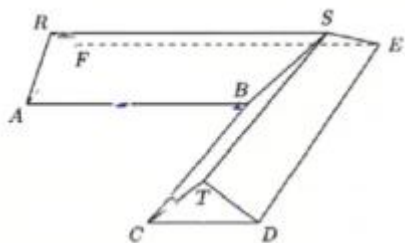
可取 $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{3}$,

故答案为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ (答案不唯一)

【分值】 4

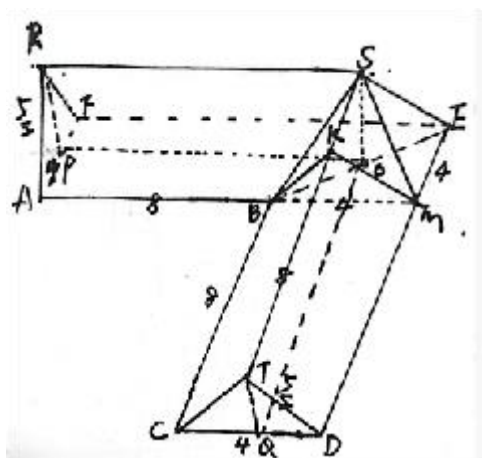
14. (☆☆) 某科技兴趣小组使用 3D 打印机制作的一个零件可以抽象为如图所示的多面体, 其中 ABCDEF 是一个平行多边形, 平面 $AFR \perp$ 平面 ABC, 平面 $CDT \perp$ 平面 ABC, $AB \perp BC$, $AB \parallel EF \parallel RS \parallel CD$, $BC \parallel DE \parallel ST \parallel AF$, 若 $AB=BC=8$,

$AF=CD=4$, $RA=RF=TC=TD=\frac{5}{2}$, 则该多面体的体积为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】60

【解析】本题考查了求多面体的体积，考查了利用切割法求体积，以及柱体与锥体的体积公式



由题意可知, $V_{\text{多面体}} = 2V_{CDEBST}$

延长 AB 交 ED 于点 M , 连 SM ,

过 B 作 $BK \parallel CT$ 交 TS 于点 K ,

连 KM , 过 R 作 $RP \perp AF$;

$\because RA = RF \therefore P$ 为 AF 的中点

过 P 作 $PO \parallel AB$, 交 BE 于点 O , 连 SO

$\therefore Q$ 为 CD 中点.

$\because O$ 为 BF 的中点; Q 为 CD 中点.

$\because CB = 8, \therefore DE = DM + ME = 8 + 4 = 12.$

故 QD 为梯形 $CBED$ 的中位线

$\therefore QO = 10, \therefore SK = TS - TK$

$\therefore SK = QD - TK$

$$= 10 - 8 = 2$$

∴面 $RAT \perp$ 面 ABC ，且交线为 AT

∴ $RP \perp$ 面 ABC $RP \parallel SO \parallel TQ$

$$\therefore RP = SO = TQ = \sqrt{TD^2 - QD^2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore V_{CTD-BKM} = S_{\triangle CTD} \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} \times 8 = 24$$

$$V_{S-BKM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BKM} \cdot SK = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} \times 2 = 2$$

$$V_{S-BME} = \frac{1}{3} S_{\triangle BEM} \cdot SO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{3}{2} = 4$$

$$\therefore V_{\text{多面体}} = 2V_{CDEBST} = 2(24 + 2 + 4) = 60$$

【分值】4

15. (☆☆) 关于定义域为 R 的函数 $f(x)$ ，以下说法正确的有.

- ①存在在 R 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立;
- ②存在在 R 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立;
- ③使得 $f(x) + f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个;
- ④使得 $f(x) - f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

【答案】②③

【解析】本题考查函数的性质、抽象函数，以及与量词有关的知识，在判定命题是否正确时，需要根据函数性质作出合理的推断。

① $y = f(x)$ 为 R 上的单调增函数， $f'(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立，而 $y = f(2x)$,

$f'(2x) = 2f'(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立，

∴ $[f(x) + f(2x)]' = f'(x) + 2f'(x) \geq 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立，

∴ $y = f(x) + f(2x)$ 为单调增函数。而 $y = -x$ 为单调减函数，

∴ $f(x) + f(2x) = -x$ 不恒成立，

∴故①错误。

②令 $f(x) = -\frac{x}{3}$,

$$\therefore f(2x) = -\frac{2x}{3},$$

$$\therefore f(x) + f(2x) = -\frac{x}{3} - \frac{2x}{3} = -x,$$

$\therefore$ 存在在 R 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x) + f(2x) = -x$ 恒成立,

$\therefore$ 故②正确。

$$\textcircled{3} \text{ 设 } f(x) = kx + \frac{1}{2} \cos x (k \neq 0),$$

$$f(-x) = -kx + \frac{1}{2} \cos(-x) = -kx + \frac{1}{2} \cos x,$$

$$\therefore f(x) + f(-x) = (kx + \frac{1}{2} \cos x) + (-kx + \frac{1}{2} \cos x) = \cos x,$$

$\therefore$ ③正确。

$$\textcircled{4}. \text{ 令 } F(x) = f(x) - f(-x), x \in R, F(-x) = f(-x) - f(x),$$

$$\therefore F(-x) = -F(x),$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数。令 $g(x) = \cos x, x \in R, g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x),$

$\therefore g(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(x) - f(-x) = \cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个是不成立的。

$\therefore$ 故答案为②③。

【分值】4

三、解答题。

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = -\frac{1}{3}, a \sin C = 4\sqrt{2}.$

(1) 求 c ;

(2) 在以下三个条件中选择一个作为已知, 使得 $\triangle ABC$ 存在, 求 BC 的高.

① $a = 6$, ② $b \sin C = \frac{10\sqrt{2}}{3}$, ③ $\triangle ABC$ 面积为 $10\sqrt{2}$

【答案】(1) $c=6$

(2) 选②, BC 边上的高为 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$; 选③, BC 边上的高为 $\frac{20\sqrt{2}}{9}.$

【解析】本题考查了正、余弦定理和三角形的面积公式

$$(1) \because \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore C = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 6$$

(2) 若选①

$a=6$ ，由(1)知 $c=6$ ，

$$\therefore a = c, \therefore A = C$$

$\therefore A$ 为钝角，则 C 为钝角

这样的三角形不存在。

若选②

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore b \sin C = c \sin B,$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{\frac{10\sqrt{2}}{3}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{9}$$

这样的三角形是存在的。

设 BC 边上的高为 h ，则 $h = b \sin C = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

若选③

$$S_{\triangle ABC} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}ab \sin C = 10\sqrt{2}, \therefore \frac{1}{2} \times b \times 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times b \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore b = 5$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 81$$

$$\therefore a = 9$$

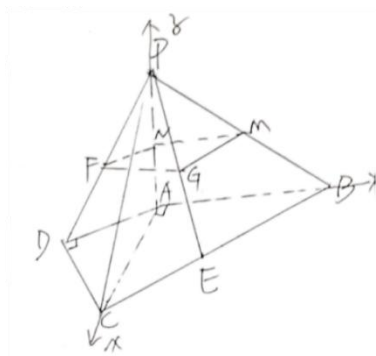
$$\therefore \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 9 \cdot h = 10\sqrt{2}$$

$\therefore FG \parallel MN$

$\because FG \not\subset \text{面 PAB}, MN \subset \text{面 PAB}, \therefore FG \parallel \text{面 PAB}$

(2) $\because PA \perp \text{面 ABCD}, \therefore$ 以 A 为原点, AC、AB、AP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



设 $AD=CD=2$, 则 $A(0, 0, 0), B(0, 2\sqrt{2}, 0), C(2\sqrt{2}, 0, 0), D(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), P(0, 0, 2\sqrt{2})$

$$\therefore \overrightarrow{AB}=(0, 2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{DC}=(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \overrightarrow{CP}=(-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}).$$

设面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\text{取 } x=1, \therefore y=-1, z=1, \therefore \vec{n}=(1, -1, 1)$$

设 AB 与面 PCD 成的角为 θ

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|0 \times 1 + 2\sqrt{2} \times (-1) + 0 \times 1|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

即 AB 与平面 PCD 成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【分值】16

18. 有一道选择题考查了一个知识点, 甲、乙两校各随机抽取 100 人, 甲校有 80 人答对, 乙校有 75 人答对, 每位同学是否答对相互独立, 用频率估计概率.

(1) 从甲校随机抽取 1 人, 求这个人做对该题目的概率;

(2) 从甲、乙两校各随机抽取 1 人, 设 X 为做对的人数, 求恰有 1 人做对的概率以及 X 的数学期望;

(3) 若甲校同学掌握这个知识点, 则有 100% 的概率做对该题目, 乙校同学掌握这个知识点, 则有 85% 的概率做对该题目, 未掌握该知识点的同学都是从四个选项里面随机选择一个, 设甲校学生掌握该知识点的概率为 P_1 , 乙校学生掌握该知识点的概率为 P_2 , 试比较 P_1 与 P_2 的大小 (结论不要求证明) .

【答案】 (1) $\frac{4}{5}$

(2) 1 人做对的概率 $\frac{7}{20}$; $E(X) = \frac{31}{20}$

(3) $P_2 > P_1$

【解析】 本题考查了概率, 数学期望与事件之间的关系. 考查了加权平均数问题.

(1) 甲校随机取 100 人, 其中有 80 人答对. 用频率估计概率, 则从甲校随机抽取 1 人, 这个人答对的概率为事件 A,

$$\therefore P(A) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

(2) 由 (1) 可知, 乙校中随机抽取 1 人, 这个人答对题目的概率为事件 B,

$$\therefore P(B) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ 从甲乙两校各随机抽取 1 人, 恰有 1 人做对的概率

$$P(X=1) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$$

$$= P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{20}$$

X 的可能取值为 0, 1, 2

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$P(X=1) = \frac{7}{20}$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

∴ X 的分布列为：

x	0	1	2
p	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{5}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{31}{20}$$

(3) 由题意可知.

$$P_1 \times 100\% + (1 - P_1) \times \frac{1}{4} = \frac{4}{5}$$

$$\text{解得 } P_1 = \frac{11}{15}$$

$$P_2 \times 80\% + (1 - P_2) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{解得 } P_2 = \frac{5}{6}$$

$$\therefore P_2 > P_1$$

【分值】15

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆上的点到两个焦点的距离之和为 4.

(1) 求椭圆方程；

(2) 设 O 为原点， $M(x_0, y_0) (x_0 \neq 0)$ 为椭圆上一点，直线 $x_0x + 2y_0y - 4 = 0$ 与 $y = 2$

和 $y = -2$ 分别相交于 A 、 B 两点，设 $\triangle OMA$ 和 $\triangle OMB$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 ，比

较 $\frac{S_1}{S_2}$ 和 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的大小.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

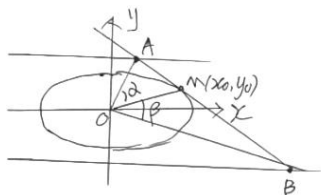
(2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$

【解析】本题考查了椭圆标准方程的求解，直线与椭圆的位置关系，涉及到三角形的面积公式等知识

$$(1) \text{ 由题可知 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2a = 4 \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ c = \sqrt{2} \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

(2)



$\therefore$ 直线 $x_0x + 2y_0y - 4 = 0$ 与直线 $y = 2$ 和 $y = -2$ 分别交于 A, B 两点，可得

$$A\left(\frac{4-4y_0}{x_0}, 2\right), B\left(\frac{4+4y_0}{x_0}, -2\right)$$

设 $\angle AOM = \alpha$, $\angle BOM = \beta$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{k_{OA} - k_{OM}}{1 + k_{OA} \cdot k_{OM}} = \frac{\frac{2x_0}{4-4y_0} - \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{2x_0}{4-4y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0}} = \frac{x_0^2 - 2y_0 + 2y_0^2}{(2 - y_0)x_0}$$

$\therefore M(x_0, y_0)$ 在椭圆上，

$$\therefore \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1,$$

$$\therefore x_0^2 = 4 - 2y_0^2$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{4 - 2y_0^2 - 2y_0 + 2y_0^2}{(2 - y_0)x_0} = \frac{2(2 - y_0)}{(2 - y_0)x_0} = \frac{2}{x_0}$$

$$\tan \beta = \frac{k_{OM} - k_{OB}}{1 + k_{OM} \cdot k_{OB}} = \frac{\frac{y_0}{x_0} - \frac{-2x_0}{4+4y_0}}{1 + \frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{-2x_0}{4+4y_0}} = \frac{2y_0 + 2y_0^2 + x_0^2}{(2 + y_0) \cdot x_0}$$

$$= \frac{2y_0 + 2y_0^2 + 4 - 2y_0^2}{(2 + y_0) \cdot x_0} = \frac{2(y_0 + 2)}{(2 + y_0)x_0} = \frac{2}{x_0}$$

$$\therefore \tan \alpha = \tan \beta, \therefore \alpha = \beta, \therefore \sin \alpha = \sin \beta$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|OA| \cdot |OM| \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2}|OB| \cdot |OM| \cdot \sin \beta} = \frac{|OA|}{|OB|}, \text{ 即 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{|OA|}{|OB|}$$

【分值】12

20. 函数 $f(x)$ 定义域为 $(-1, +\infty)$, 且 $f(0)=0$, $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, $f(x)$ 在 $A(a, f(a))$ 处的切线为 l_1 .

(1) 求 $f'(x)$ 的最大值;

(2) 证明: 当 $-1 < a < 0$, 除切点 A 外, $y=f(x)$ 均在 l_1 上方;

(3) 当 $a > 0$ 时, 直线 l_2 过点 A 且与 l_1 垂直, l_1 、 l_2 与 x 轴的交点横坐标分别为 x_1 、 x_2 , 求 $\frac{2a-x_2-x_1}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{1}{e}$

(2) 见解析

(3) $[\frac{e^2-1}{e^2+1}, 1)$

【解析】本题考查了利用导数研究函数的最值, 导数的几何意义以及证明函数不等式

(1) 设 $g(x) = f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}, (x > -1)$

$$\therefore g'(x) = \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \therefore 1 - \ln(x+1) = 0, \therefore x = e - 1$$

$\therefore$ 当 $x \in (-1, e-1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x \in (e-1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = e-1$ 时, $g(x)$ 取得唯一极大值, 即为最大值

$$\therefore g(x)_{\max} = g(e-1) = \frac{\ln(e-1+1)}{e-1+1} = \frac{1}{e}$$

即 $f'(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$

(2) 设 l_1 的斜率为 k_1 , 则 $k_1 = f'(a) = \frac{\ln(a+1)}{a+1}$

$$\therefore l_1: y - f(a) = \frac{\ln(a+1)}{a+1}(x-a), \text{ 即 } y = \frac{\ln(a+1)}{a+1}(x-a) + f(a)$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{\ln(a+1)}{a+1}(x-a) + f(a)$$

$$\text{令 } T(x) = f(x) - h(x),$$

$$\therefore T'(x) = f'(x) - h'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - \frac{\ln(a+1)}{a+1} = g(x) - g(a),$$

由(1)知, 当 $x \in (-1, e-1)$ 时, $g(x)$ 单调递增.

$\because a \in (-1, 0)$, $\therefore$ 当 $x \in (-1, a)$ 时, $g(x)$ 单调递增, $\therefore g(x) < g(a)$

$\therefore T'(x) < 0$, $\therefore T(x)$ 在 $(-1, a)$ 单调递减.

当 $x \in (a, 0)$ 时, $g(x) > g(a)$, $\therefore T'(x) > 0$, $\therefore T(x)$ 单调递增

$$\therefore T(x)_{\min} = T(a) = 0, \therefore T(x) \geq 0, \therefore f(x) - h(x) \geq 0$$

$\therefore f(x) \geq h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 恒成立, 当 $x = a$ 时取等号

$\therefore$ 当 $-1 < x < 0$ 时, 除 A 外, $y = f(x)$ 均在 l_1 上方。

(3) $\because l_2$ 与 l_1 垂直, l_1 的斜率为 k_1 , l_2 的斜率为 k_2

$$\therefore k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

$$\therefore l_1: y - f(a) = \frac{\ln(a+1)}{a+1}(x-a),$$

$$\text{令 } y = 0, \therefore x_1 = -\frac{f(a)(a+1)}{\ln(a+1)} + a,$$

$$l_2: y - f(a) = -\frac{a+1}{\ln(a+1)}(x-a),$$

$$\text{令 } y = 0, x_2 = \frac{f(a) \cdot \ln(a+1)}{a+1} + a,$$

$$\therefore x_2 - x_1 = f(a) \left(\frac{\ln(a+1)}{a+1} + \frac{a+1}{\ln(a+1)} \right)$$

$$x_1 + x_2 = f(a) \left(\frac{\ln(a+1)}{a+1} - \frac{a+1}{\ln(a+1)} \right) + 2a$$

$$\therefore \frac{2a - x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a+1}{\ln(a+1)} - \frac{\ln(a+1)}{a+1}}{\frac{\ln(a+1)}{a+1} + \frac{a+1}{\ln(a+1)}}$$

$$\text{设 } t = \frac{\ln(a+1)}{a+1}$$

$$\therefore y = \frac{\frac{1}{t} - t}{t + \frac{1}{t}} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} = -1 + \frac{2}{t^2 + 1}$$

$$\text{由(1)知, } t_{\max} = \frac{1}{e}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{e}$$

$$\therefore y = -1 + \frac{2}{t^2 + 1}, \therefore y \text{ 在 } (0, \frac{1}{e}] \text{ 单调递减}$$

$$\therefore y_{\min} = \frac{2}{\frac{1}{e^2} + 1} - 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$$

$$\therefore a \rightarrow 0 \text{ 时, } t \rightarrow 0, \therefore y < 1$$

综上所述, 原式的取值范围为 $[\frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}, 1)$

【分值】15

21. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{(x_i, y_i) | x_i \in A, y_i \in A\}$, 从 M 中选出 n 构成一

列: $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. 相邻两项 $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ 满足: $|x_{i+1} - x_i| = 3$ 或 $|y_{i+1} - y_i| = 4$

$|x_{i+1} - x_i| = 4$
 $|y_{i+1} - y_i| = 3$, 称为 K 列.

(1) 若 K 列的第一项为 $(3, 3)$, 求第二项;

(2) 若 τ 为 K 列, 且满足 i 为奇数时, $x_i \in \{1, 2, 7, 8\}$; i 为偶数时, $x_i \in \{3, 4, 5, 6\}$;

判断: $(3, 2)$ 与 $(4, 4)$ 能否同时在 τ 中, 并说明;

(3) 证明: M 中所有元素都不构成 K 列.

【答案】(1) (6, 7) 或 (7, 6)

(2) 不能

(3) 见解析

【解析】本题考查了数列的新定义，考查了归纳推理能力.

(1) 由题意，可得 $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 3 \\ y_{i+1} = y_i \pm 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 4 \\ y_{i+1} = y_i \pm 3 \end{cases}$

∴ 若 K 列的第一项为 (3, 3)，则第二项为 (6, 7) 或 (7, 6)

(2) 设 $z_i = x_i + y_i$ ，∴ $z_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}$

∴ $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 3 \\ y_{i+1} = y_i \pm 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_{i+1} = x_i \pm 4 \\ y_{i+1} = y_i \pm 3 \end{cases}$,

∴ $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i \pm 7$

或 $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i \pm 1$

即 $(x_{i+1} + y_{i+1})$ 与 $(x_i + y_i)$ 奇偶轮换

即 z_{i+1} 与 z_i 奇偶性不同， z_{i+2} 与 z_i 奇偶性相同.

若 $(x_i, y_i) = (3, 2)$ ， $(x_j, y_j) = (4, 4)$ 均在 τ 中，

由 $x_i = 3$ ， $x_j = 4$ 知， i ， j 均为偶性，∴ z_i 与 z_j 奇偶性相同，

而 $z_i = 5$ ， $z_j = 8$ 奇偶性不同，∴ 矛盾，

故 (3, 2)，(4, 4) 不能同时在 τ 中.

(3) 由题知，M 为点集，由 (2) 知，设 $M_i(x_i, y_i)$ ， $x_i, y_i \in \{1, 2, 7, 8\}$ ，

则 $(x_{i+1}, y_{i+1}) \in \{3, 4, 5, 6\}$ ，其中 M_i 共有 $4 \times 4 = 16$ 个点，

而 $(x_{i+1}, y_{i+1}) \neq (3, 3), (6, 3), (3, 6), (6, 6)$ ，因为 6 由 2 来，3 由 7 来，

横、纵坐标不能同时相差 4，∴ M_{i+1} 有 12 个点，

即对于 16 个 (x_i, y_i) ，有 12 个 (x_{i+1}, y_{i+1}) 与之相对应，矛盾.

综上，M 中所有元素都无法构成 K 列.

【分值】20