

2026 年上海数学卷高考真题带答案带解析

一、填空题

1.

1.若集合 $A = \{2, a+1\}$, 且 $-1 \in A$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

2.

2.已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = 2, a_2 = 6$, 则 $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 54

【解析】

3.

3.已知 $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{23}{25}$

【解析】

4.

4.已知事件 A 和事件 B 互斥, 且 $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, 则 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0.7

【解析】

5.

5.函数 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x} - a$, 若 $f(-4) = 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

6.

6.在 $(x^2 + x)^5$ 的二项展开式中, x^7 项的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 10

【解析】

7.

7.已知 $a^2 + 4b^2 = 1$ ，则 ab 的最大值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

8.

8.已知 X 的分布为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0.3 & b \end{pmatrix}$, $E[X] = 0.5$, 则 $b =$ _____.

【答案】 0.6

【解析】

9.

9.已知等差数列 $a_1 = 0$, d 为公差, S_n 为前 n 项和, 至少有两项介于 $(0, 1)$, 则 d 的取值范围为_____.

【答案】 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

【解析】

10.

10.已知 $k \in R$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两不平行, 已知 $\vec{a} + 3\vec{b} \parallel \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{a} + k\vec{c} \parallel \vec{b} + \vec{c}$, $k =$ _____.

【答案】 -6

【解析】

11.

11.已知三角函数 $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ ($A > 0, B \in R, \omega > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$), 若 $v = f(t)$, 当 $v = 0$ 或 $v = 4$ 时其导数为 0, 初始速度为 0, 且速度第一次达到 4 时用时为 0.1 秒, 求 $f(t) =$ _____.

【答案】 $-2\cos(10\pi t) + 2$

【解析】

12.

12.已知 A, B, C 为一椭圆 4 个顶点和 2 个焦点中任意三个, $AB = 3, BC = \sqrt{14}, AC = 5$, 则该椭圆的离心率为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

13.

13. a 为不为 1 的任意实数, 则 $a \cdot \sqrt[3]{a} = (\quad)$.

- A. $a^{\frac{3}{2}}$ B. $a^{\frac{4}{3}}$ C. $a^{\frac{5}{2}}$ D. $a^{\frac{5}{3}}$

【答案】 B

【解析】

14.

14. 已知事件 A 、事件 B 为独立随机事件, 事件 C 表示为事件 A 、 B 至少有一件发生, 则 $\overline{C} = (\quad)$.

- A. $A \cap B$ B. $A \cup B$ C. $\overline{A} \cap \overline{B}$ D. $\overline{A} \cup \overline{B}$

【答案】 C

【解析】

15.

15. 对于任意两个复数 z, w , 如果满足“ $z - w \in R^+$ ”或“ $z - w \in R^+$ ”, 那么就称 z 与 w 伴随“品”中学生为,

如果 z 与 w 伴随, 则 $w - i$ 与 $z + i$ 伴随的充要条件是($\quad$).

- A. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w = 0$ B. $\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w = 0$
C. $\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w = 0$ D. $\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w = 0$

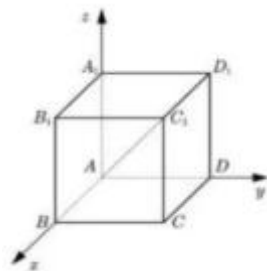
【答案】 C

【解析】

16.

16. 如图, 在一个空间直角坐标系中, 存在一个正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 其中, A 为坐标原点, 将该正方体绕体对角线 AC_1 为旋转轴旋转一周, 点 C 将经过($\quad$)个卦限.

- A. 1 B. 3 C. 4 D. 7



【答案】

【解析】

17.

17.某工厂为进行环境保护与改善,对九年间空气中某颗粒物密度与二氧化硫密度进行了监测与记录,数据如下:

某颗粒物密度	101.02	87.02	57.46	21.85	11.76	8.86	5.03	4.63	3.86
二氧化硫密度	119.47	51.84	53.2	9.16	6.6	4.4	3.31	3.35	3.86

(1)为进一步研究,从这9年间随机抽取一年,该年份颗粒物的密度大于二氧化硫密度的概率是多少?

(2)为研究颗粒物密度与二氧化硫密度的相关性,该工厂应选取茎叶图、扇形图、散点图中的哪一种进行分析,并请你判断相关系数在 $(-1,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(1,2)$ 哪个区间内(直接写结论).

(3)2023年前9年的年份 (x) 的平均数为2018, y (颗粒物密度)关于 x (年份)的回归方程拟采用

$y = 106.544e^{-0.46(x-2014)}$,或 $y = a(x-2014) + 83.743$.已知2023年实际颗粒物浓度为3.88,则哪个回归方程对于2023年的预测值与实际值的差值绝对值更小?

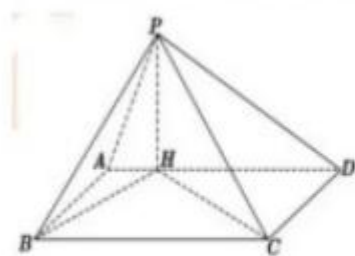
【答案】

【答案】(1) $\frac{7}{9}$; (2)散点图, $(0,1)$; (3) $y = 106.544e^{-0.46(x-2014)}$ 对于2023年的预测值与实际值的差值绝对值更小.

【解析】

18.

18.如图,四棱锥 $P-ABCD$,底面 $ABCD$ 为矩形, $PH \perp$ 底面, $AH=1$, $HD=4$, $AB=2$.



(1)证明: $HC \perp PB$;

(2)若四棱锥体积 $V_{P-ABCD} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$,求二面角 $C-PB-H$ 的大小.

【答案】(1)略 (2) $\arctan 2\sqrt{2}$

【解析】

19.

19. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$, $g(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$

(1) 已知 $f(1) = 4$, 求 $f(x) + \frac{1}{x^2} > g(x)$ 的解集;

(2) $a \neq 0$, l_1 是 $f(x)$ 在点 $(0, 3)$ 处的切线, l_2 是过点 $(0, 3)$ 且垂直于 l_1 的直线, $g(x)$ 与 l_1 、 l_2 在第一象限内均无公共点, 求 a 的取值范围.

$$(1) (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty); \quad (2) \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2)$$

【答案】

【解析】

(2) $f'(x) = 2x + a$, $f'(0) = a$, 故直线 l_1 的方程为: $y = ax + 3$, 直线 l_2 的方程为: $y = -\frac{1}{a}x + 3$.

由题意可知: $g(x) = 4x + \frac{1}{x^2} = ax + 3$ 无正实数解, 且 $g(x) = 4x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{a}x + 3$ 无正实数解

参变分离可得: $a = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$, $-\frac{1}{a} = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$,

即直线 $y = a$ 及 $y = -\frac{1}{a}$ 与曲线 $y = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内均无交点;

设函数 $h(x) = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$, $h'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^4} = \frac{3x^2 - 3}{x^4} = \frac{3(x+1)(x-1)}{x^4} = 0$, $x = 1$. 故函数 $h(x)$ 在

$(0, 1)$ 范围内严格减, 在 $(1, +\infty)$ 范围内严格增, $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 极小值 $h(1) = 2$, $x \rightarrow +\infty$ 时,

$h(x) \rightarrow +\infty$, 绘制出 $h(x)$ 的函数图像, 可得: $a < 2$, 且 $-\frac{1}{a} < 2$, 解得: $a < -\frac{1}{2}$ 或 $0 < a < 2$, 所以

$$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, 2)$$

20.

20. 定义 $\Gamma: x^2 - y^2 = 1$, F_1, F_2 为 Γ 的左右焦点

(1) 求点 $(2, 0)$ 到 Γ 渐近线的距离;

(2) P 为 Γ 上一点, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积;

(3) 设 $\Omega: x^2 - y^2 = 1$, 其中 $\begin{cases} x < 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$, 过点 F_2 的直线 l 交 Ω 于 P 、 Q 两点(分别位于一、

四象限), 过点 F_2 直线 m 交 Ω 于 M 、 N 两点(分别位于三、四象限), 是否存在正数 λ , 对于任意的 l ,

都存在唯一的 m , 使 $|MN| = \lambda|PQ|$ 成立, 若存在, 求出所有的 λ , 若不存在, 请说明理由

【答案】

$$(1) \sqrt{2}; \quad (2) \sqrt{2}; \quad (3) \lambda \geq \frac{9}{7}$$

【解析】

【详解】(2) 设 $P(x, y)$, 则 $x^2 - y^2 = 1$ ①, 由于 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 所以

$\overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{2} - x, -y), \overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{2} - x, -y)$, 因为 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$, 所以 $x^2 + y^2 = 3$ ②,

由①②得 $\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases}$, 所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |F_1F_2| |y| = \sqrt{2}$.

(3) 设 $l: x = ty + \sqrt{2}, t \in [0, 1)$, 联立 $\begin{cases} x = ty + \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$ 得 $(t^2 - 1)y^2 + 2\sqrt{2}ty + 1 = 0$, 则

$$|PQ| = \sqrt{1+t^2} |x_P - x_Q| = \frac{2(t^2+1)}{1-t^2}, t \in [0, 1), \text{ 得 } |PQ| \text{ 的范围是 } [2, +\infty)$$

设 $m: x = ny + \sqrt{2}, n \in (1, 2\sqrt{2}]$, 同理, 得 $|MN| = \frac{2(n^2+1)}{n^2-1} = 2 + \frac{4}{n^2-1}, n \in (1, 2\sqrt{2}]$, 得 $|MN|$ 的范

围是 $\left[\frac{18}{7}, +\infty\right)$, 且 $|MN|$ 关于 n 是严格减函数, 即每一个 $|MN|$ 的值都是唯一的.

对于任意的 l , 因为 $\lambda > 0$, 所以 $\lambda|PQ|$ 的范围是 $[2\lambda, +\infty)$, 要存在唯一的 m , 使 $|MN| = \lambda|PQ|$

成立, 只需 $[2\lambda, +\infty) \subseteq \left[\frac{18}{7}, +\infty\right)$ 即可, 即 $\frac{18}{7} \leq 2\lambda$, 得 $\lambda \geq \frac{9}{7}$.

21.

21. (i, j, k) 是 1, 2, 3 的一个排列, 对函数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$, 对于任意 $x \in I$, 都有 $f_1(x) \leq f_i(x)$ 且 $f_1(x) + f_2(x) \leq f_i(x) + f_j(x)$, 则称 (i, j, k) 是关于 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的一个 I 排列. 关于 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的 I 排列总数记为 n_I .

(1) 对 $I = [3, +\infty)$, $f_1(x) = x, f_2(x) = 0, f_3(x) = x^2 + 1$, 判断 $(3, 1, 2)$ 是否为 I 排列?

(2) 对 $I = (0, +\infty)$ $f_1(x) = x - 1, f_2(x) = x + m, f_3(x) = x^2$ 满足条件的 $n_I = 6$, 求 m 的取值范围?

(3) 对 $x \in [0, +\infty)$, 且对任意 $x \in [0, +\infty), 0 < F(x) < 1$, 令 $I = [a, +\infty), f_1(x) = F(x),$

$f_2(x) = \frac{1}{2}(F(x+a) + F(x-a)), f_3(x) = 1 - e^{-x}$, 证明: 若 $F(x)$ 严格减, 则存在 $a > 0$, 使 $n_I \geq 4$; 若

$F(x)$ 严格增, 则存在 $a \in (0, 1) n_I \neq 2$;

【答案】

(1) 是; (2) $m \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right]$; (3) 详见解析

【解析】

【解析】(1)因为 $f_1(x) \leq f_3(x) \Leftrightarrow x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0$,

$f_1(x) + f_2(x) \leq f_3(x) + f_1(x) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 1$, 所以 $(i, j, k) = (3, 1, 2)$ 时满足条件,

即 $(3, 1, 2)$ 是 I 排列!

(2) 1, 2, 3 的全排列共有 6 个, 则当 $n_i = 6$ 时, 则一方面有

$$\begin{cases} f_1(x) \leq f_2(x) \\ f_1(x) \leq f_3(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq x+m \\ x-1 \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow m \geq -1;$$

另一方面, 有 $\begin{cases} f_1'(x) + f_2'(x) \leq f_2'(x) + f_3'(x) \\ f_1'(x) + f_2'(x) \leq f_1'(x) + f_3'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq x^2 \\ x+m \leq x^2 \end{cases} \Rightarrow m \leq x^2 - x,$

因为 $(x^2 - x)_{\min} = -\frac{1}{4}$ ($x = \frac{1}{2}$ 时取到), 所以 $m \leq -\frac{1}{4}$;

综上所述: $m \in \left[-1, -\frac{1}{4}\right]$.